

# 气动热数值模拟中壁面热流后处理方法

张胜涛, 陈 方, 刘 洪

(上海交通大学 航空航天学院, 上海 200240)

**摘 要:** 针对气动热数值模拟中壁面热流后处理方法进行了系统的数值研究, 提出了一种有别于常规微分法和积分法的壁面热流后处理方法. 通过 3 种算例进行了对比分析, 结果表明: 即使在流场参数相同情况下, 采用不同的壁面热流后处理方法计算的热流结果也会有较大差异, 且表现出不同的网格依赖性. 微分法对网格的依赖性较大, 单纯提高差分精度不一定能够减弱网格依赖性和提高计算精度, 还与近壁处网格分布密切相关; 积分法从能量平衡积分方程出发, 极大地减弱了网格依赖性, 具有较高的计算精度. 所提出方法具有与积分法相当的网格依赖性和计算精度, 尤其在驻点区域, 其网格依赖性更弱于积分法, 且计算简单, 提高了计算效率.

**关 键 词:** 壁面热流后处理方法; 高超声速; 气动热; 网格尺度; 计算流体力学

**中图分类号:** V211.22; V211.3

**文献标志码:** A

## Post-processing methods for wall heat-flux in aeroheating numerical simulation

ZHANG Sheng-tao, CHEN Fang, LIU Hong

(School of Aeronautics and Astronautics,

Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** A systematic study of post-processing methods for wall heat-flux in aeroheating numerical simulation was conducted and a post-processing method differing from conventional differential or integral methods was proposed. The comparisons among different post-processing methods were done by three cases. The results indicate that, even if the flow parameters remain the same, significant differences and grid-dependence in wall heat-flux prediction are observed using different post-processing methods. The differential method depends strongly on the grid used in calculations. Enhancement of the order of finite difference cannot always weaken its grid-dependence and improve its accuracy in wall heat-flux prediction, which is also related closely to the grid distribution near the wall. The integral method derived directly from the integral energy balance equation can significantly achieve a lower grid-dependence and thus a high accuracy. The proposed method can be compared with the integral method in the aspect of grid-dependence and accuracy. Especially, in the stagnation region, it has even weaker grid-dependence. Moreover, it is simpler and easier to be implemented numerically, thus further improving the computation efficiency.

**Key words:** post-processing method for wall heat-flux; hypersonic; aeroheating; grid scale; computation fluid dynamics

随着数值方法和计算机技术的发展,计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)在航空航天领域所起的作用越来越重要。目前大多数 CFD 方法能够给出较为精确的气动力结果,但是,对于壁面热流的预测往往会有数量级的差异<sup>[1-2]</sup>。高超声速气动热的数值模拟一直是 CFD 研究的难点问题,主要因为它是流体黏性起主导作用的物理现象,在计算中受物理模型、数值格式、网格分布、收敛过程以及热流后处理方法等诸多因素的影响和制约<sup>[3-4]</sup>。

以往针对高超声速气动热的 CFD 数值模拟研究主要集中在物理模型、数值格式及网格效应等方面<sup>[1-4]</sup>。其中,对于网格效应的研究表明,气动热的数值模拟对流向和法向网格点数的依赖性相对较低,网格依赖性的影响主要体现在壁面法向网格尺度<sup>[5-7]</sup>。在其他条件均不改变的情况下,只改变壁面法向网格尺度,计算出的壁面热流结果往往差别很大。为了获得网格无关的壁面热流,通常需要非常小的壁面法向网格尺度,从而使计算变得异常困难。因此,如何尽量减弱热流计算对壁面法向网格尺度的依赖性,是气动热数值模拟研究的重要内容。

壁面热流不是流场计算的直接结果,而是流场参数的间接导出量。即使在物理模型、数值格式和网格分布均相同的情况下,采用不同的壁面热流后处理方法计算的热流结果往往也会有较大差异,表现出不同的网格依赖性<sup>[8-10]</sup>。目前,气动热数值模拟中壁面热流后处理方法主要有两类:微分法和积分法。微分法是通过有限差分离散计算壁面热流,计算简单,但其网格依赖性较大;积分法是基于表面能量积分方程计算壁面热流,降低了网格依赖性,具有较高精度,但计算复杂且会增加一定计算量。本文针对气动热数值模拟中壁面热流后处理方法进行系统的数值研究,同时提出一种有别于常规微分法和积分法的壁面热流后处理方法。最后,通过 3 种算例对各种壁面热流后处理方法进行分析比较。

## 1 流动控制方程及数值方法

基于量热完全气体模型的三维黏性可压缩流动 Navier-Stokes 方程组在直角坐标系下守恒积分形式为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (1)$$

式中  $\mathbf{U}$  为流场守恒变量;  $\mathbf{F}_c$  和  $\mathbf{F}_v$  分别为对流通

量和黏性通量;  $d\Omega$  为微体积;  $dS$  为微面积;  $\hat{\mathbf{n}}$  为微面积  $dS$  单位外法矢量。

基于有限体积法离散上述控制方程。其中,对流通量利用 AUSM<sup>+</sup> (advection upstream splitting method)<sup>[11-12]</sup>迎风格式进行离散;黏性通量利用 2 阶中心差分格式进行离散;时间推进采用隐式的 LU-SGS (lower-upper symmetric Gauss-Seidel) 算法<sup>[13-14]</sup>。为了加速收敛过程,采用了当地时间步长和隐式残值平均等加速收敛措施。

## 2 壁面热流后处理方法

### 2.1 微分法

由于黏性作用,流体在贴壁处被滞止而处于无滑移状态,故存在一层极薄的流体相对于壁面是不流动的,壁面与流体间的热量传递必须穿过这一流体层。根据能量守恒,壁面热流就等于贴壁流体层的导热热量,将 Fourier 导热定律应用于贴壁流体层,则壁面热流计算公式为

$$q_w = -\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w \quad (2)$$

式中  $\lambda_w$  为壁面处流体导热系数;  $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w$  为壁面法向流体温度梯度。

对于式(2),如图 1 所示,在数值计算中,若采用 1 阶精度的有限差分离散,有

$$q_w = -\lambda_w \frac{T_w - T_1}{\Delta n} \quad (3)$$

若采用 2 阶精度的有限差分离散,则有

$$q_w = -\lambda_w \frac{3T_w + T_2 - 4T_1}{\Delta n} \quad (4)$$

式中  $T_w$  为壁面温度;  $T_1$  为第 1 层网格处的温度;  $T_2$  为第 2 层网格处的温度;  $\Delta n$  为壁面法向网格尺度。

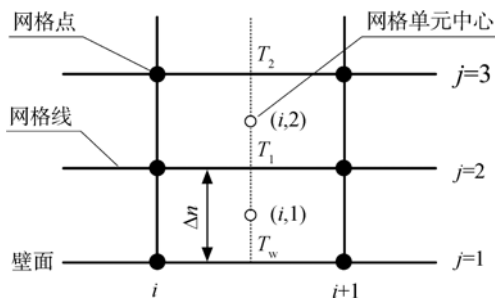


图 1 近壁面网格分布示意图

Fig. 1 Schematic of grid distribution near wall

### 2.2 积分法

在流动达到定常状态后,其能量方程的积分

形式可表示为

$$\oint_{\partial\Omega} \rho h_t \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{\Pi} - \mathbf{q}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5)$$

式中  $\rho$  为气体密度;  $h_t$  为单位质量气体总焓;  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  分别为速度矢量、热流密度矢量和黏性功密度矢量,其表达式为

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (6)$$

$$\mathbf{q} = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} = & (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz})\mathbf{i} + \\ & (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz})\mathbf{j} + \\ & (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (8)$$

由于在壁面处流体处于无滑移状态,流动速度为零,由式(5)得壁面热流表达式为

$$\begin{aligned} q_w = & \mathbf{q}_w \cdot \hat{\mathbf{n}}_w = \\ & \frac{1}{dS_w} \oint_{\partial\Omega \neq \partial\Omega_w} (\mathbf{\Pi} - \mathbf{q} - \rho h_t \mathbf{V}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)应用于贴壁处有限体积网格单元内,则得到积分形式的壁面热流计算公式为

$$q_w = \frac{1}{\Delta S_w} \sum_{\Delta S_j \neq \Delta S_w} (\mathbf{\Pi} - \mathbf{q} - \rho h_t \mathbf{V})_j \cdot \hat{\mathbf{n}}_j \Delta S_j \quad (10)$$

式中  $\Delta S_w$  为网格单元在壁面处的表面积。

### 2.3 本文方法

微分法虽然计算简单,但其计算精度直接依赖于壁面温度梯度的计算,而壁面温度梯度的差分离散与  $\Delta n$  的选取直接相关,故微分法对网格的依赖性较大。积分法直接从能量平衡积分关系出发计算壁面热流,并没有涉及到显式温度梯度计算,减弱了对网格的依赖性,计算精度较高,但计算相对复杂且会增加一定的计算量。

本文直接从壁面热流计算公式(式(2))出发,将其进一步表示为

$$q_w = -\lambda_w \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w = -\lambda_w (\nabla T)_w \cdot \hat{\mathbf{n}}_w \quad (11)$$

根据数学上的高斯定理,对于任一标量  $\phi$  存在如下关系:

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \phi) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \phi \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S} \quad (12)$$

将式(12)应用于近壁有限体积网格单元内,可得近壁网格单元中心处的温度梯度为

$$\nabla T \approx \frac{1}{\Delta\Omega} \oint_{\partial\Omega} T \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_j T_j \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \Delta S_j \quad (13)$$

根据近壁有限体积单元中心处的温度梯度,采用线性外插得到壁面处温度梯度  $(\nabla T)_w$ ,然后

代入式(11)计算壁面热流。可以看出此方法计算简单,且在计算壁面温度梯度时没有显式包含  $\Delta n$ ,关于其网格依赖性及其计算精度,下文算例将予以证明。

## 3 计算结果及分析

### 3.1 平板算例

该算例为超声速平板层流边界层定常流动,  $Ma_\infty = 2.0$ , 单位来流雷诺数  $Re_\infty = 1.65 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_\infty = T_w = 221.6 \text{ K}$ 。文中下标  $\infty$  表示来流。计算网格如图2所示,网格大小为  $101 \times 61$ ,在近壁面处进行了加密处理。

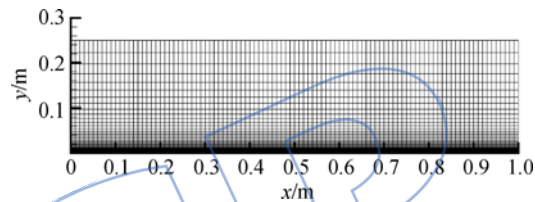


图2 平板流场计算网格

Fig. 2 Computational grid of flowfield over flat plate

图3为平板绕流的温度场分布,可以看出明显的温度边界层特征,从起始位置沿着板长温度边界层逐渐增厚。为了研究壁面热流后处理方法的网格依赖性,沿着板长分别选取  $x = 0.10, 0.25, 0.50, 0.80 \text{ m}$  处的热流结果进行考察。这里只是单纯地改变壁面法向网格尺度,而不改变网格的大小和拓扑分布。由于气动热计算的收敛过程比压力慢得多<sup>[3]</sup>,本文在计算中通过直接观察壁面热流的变化确保每次计算得到的是收敛的热流结果。

图4给出了各点位置壁面热流计算值与理论值之比  $q_w/q_{\text{theory}}$  随网格雷诺数  $Re_c = \rho_\infty U_\infty \Delta n / \mu_\infty$ <sup>[2]</sup> 的变化情况。层流平板壁面热流理论值计算公式<sup>[15]</sup>为  $q_{\text{theory}} = \rho_\infty u_\infty (h_{aw} - h_w) C_h^*$ 。图中,方法1

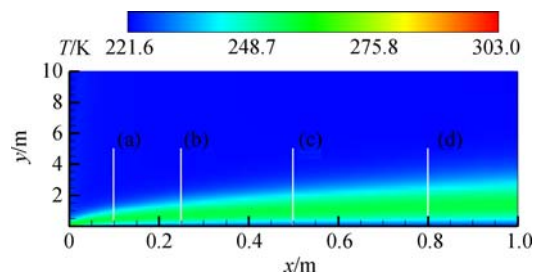


图3 平板绕流温度场分布

Fig. 3 Temperature field around flat plate

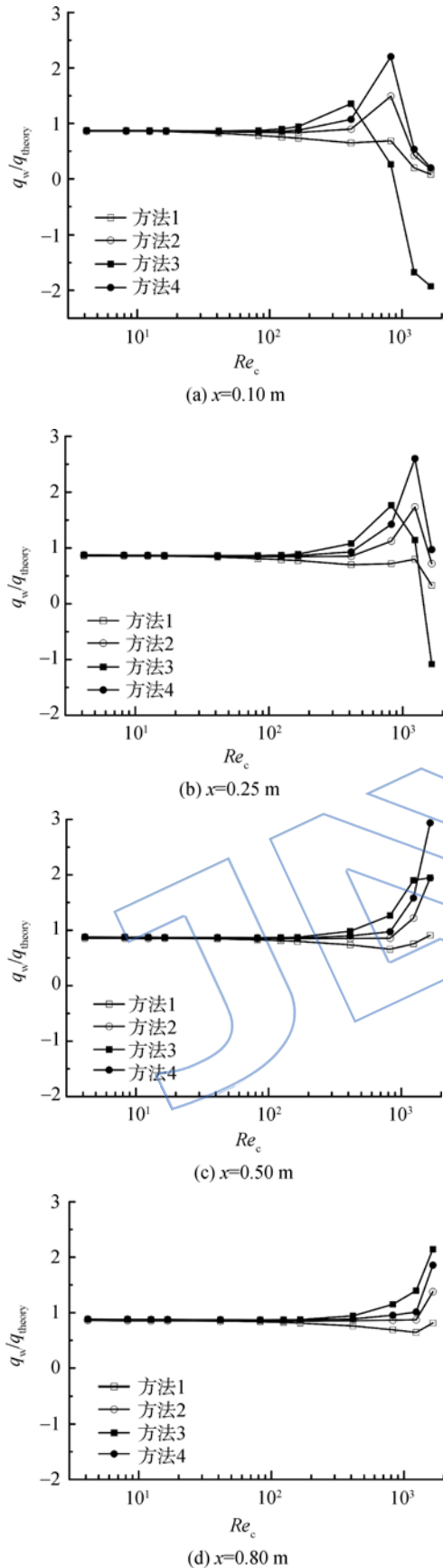


图 4 平板壁面热流随网格雷诺数的变化

Fig. 4 Wall heat-flux varying with grid Reynolds number for flat plate

为 1 阶微分法;方法 2 为 2 阶微分法;方法 3 为积分法;方法 4 为本文方法,下文表示均相同.可以看出,即使流场参数相同,采用不同的壁面热流后处理方法得到的壁面热流结果也会有较大差异;随着网格雷诺数逐渐减小,即壁面法向网格尺度逐渐加密,采用上述 4 种壁面热流后处理方法,虽然最终都能得到网格无关的壁面热流,但却表现出了不同的网格依赖性.其中,方法 3 直接从能量平衡积分关系出发计算壁面热流,没有涉及到显式的温度梯度计算,对网格的依赖性较低;方法 1 对网格的依赖性最大,且温度边界层越薄,壁面温度变化越剧烈,网格依赖性也会越严重;方法 2 由于提高了壁面温度梯度的计算精度,对网格的依赖性明显减弱,在 4 种方法中表现最好;本文方法从微分法的角度出发,但在计算壁面温度梯度时并没有显式包含  $\Delta n$ ,表现出了较弱的网格依赖性以及较好的计算精度,在本算例中仅次于 2 阶微分法.

### 3.2 圆柱钝体算例

二维圆柱钝体<sup>[16]</sup>的半径为  $0.0381\text{ m}$ ,计算条件及网格如图 5 所示,网格大小为  $101 \times 111$ ,在激波位置及壁面附近进行了加密处理.

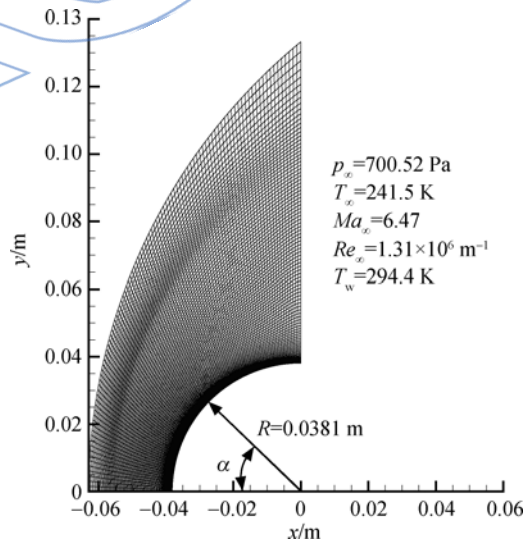


图 5 圆柱钝体计算网格和计算条件

Fig. 5 Computational grid and conditions of cylindrical blunt body

图 6 和图 7 分别为圆柱钝体的驻点热流及壁面热流分布随网格雷诺数的变化.图中  $q_{F-R}$  为由 Fay-Riddell 公式<sup>[17]</sup>计算的驻点热流值.可以明显看出基于微分法的壁面热流后处理方法表现出了较强的网格依赖性.对于方法 1,随着网格雷诺数的逐渐减小,计算的驻点热流值逐渐增加,当网格

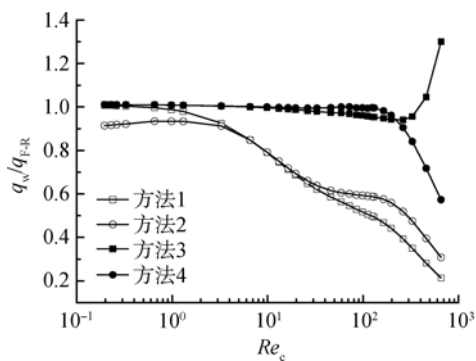


图6 圆柱钝体驻点热流随网格雷诺数的变化  
Fig. 6 Stagnation-point heat-flux varying with grid Reynolds number for cylinder-blunt body

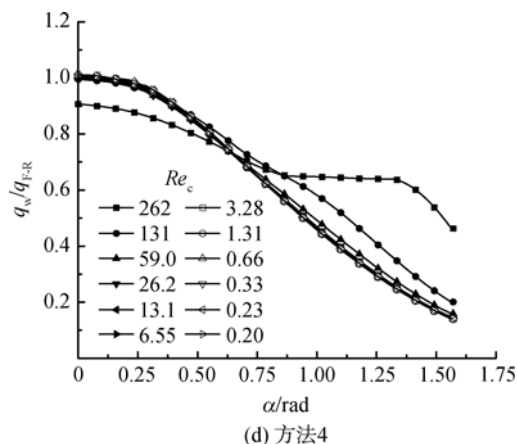
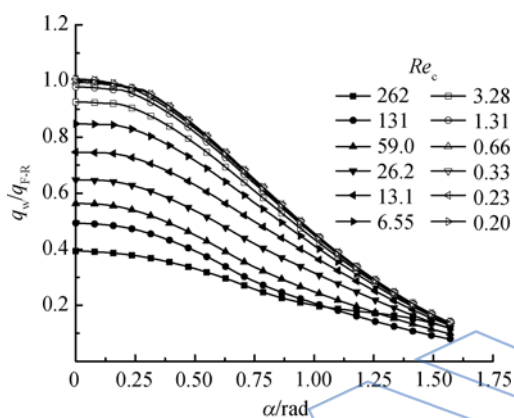
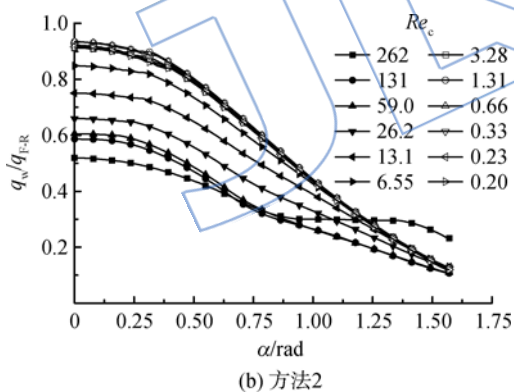


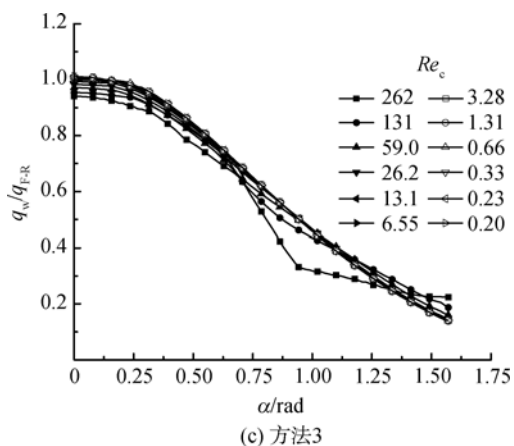
图7 圆柱钝体壁面热流分布随网格雷诺数的变化  
Fig. 7 Wall heat-flux distribution varying with grid Reynolds number for cylindrical-blunt body



(a) 方法1



(b) 方法2



(c) 方法3

雷诺数小于1之后,才逐渐达到网格无关;而对于方法2,虽然对于上述平板算例表现出了较弱的网格依赖性和较高的计算精度,但对于此算例,其网格依赖性反而比方法1还要强,且计算精度降低.可见,基于微分法计算壁面热流时,单纯提高壁面温度梯度的差分精度,并不一定能够减弱对网格的依赖性和提高计算的精度,还与网格分布密切相关.当网格分布在近壁温度边界层内满足充分的正交要求时(例如上述平板算例规则的直角网格),提高差分精度才有可能有效增加计算精度,减弱网格依赖性.否则,由于涉及到更多网格点,反而会进一步增强网格依赖性,降低计算精度.相对于微分法,积分法明显减弱了网格依赖性,可以在更大的网格雷诺数下得到网格无关的热流.本文方法虽然从微分法的角度出发,但避免了显式的温度梯度计算,极大地减弱了网格依赖性,而且具有较高的计算精度,表现出与积分法相当的网格依赖性和精度,尤其在驻点区域,网格依赖性比积分法还要弱.此外,相对于积分法,本文方法计算相对简单,提高了一定的计算效率.

### 3.3 钝双锥体算例

为了进一步比较分析,接着又以三维钝双锥体<sup>[18]</sup>为计算模型进行了气动热数值模拟.该钝双锥体的流动条件及计算网格如图8所示,由于流场对称性,这里只考虑了半模;计算网格采用两块结构化网格,其中,头部区域网格大小为 $31 \times 71 \times 31$ ,身部区域网格大小为 $81 \times 71 \times 91$ ,在壁面附近进行了加密处理.

图9为利用不同的壁面热流后处理方法计算的驻点热流随网格雷诺数的变化情况.可以看出,

在三维流动情况下,微分法的数值表现与上述圆柱钝体算例分析的结论相一致,本文方法在驻点区域依然表现出了比积分法更弱的网格依赖性.表 1 给出了采用不同壁面热流后处理方法得到的最终网格无关驻点热流值与试验结果的对比,本文方法在三维情况下也具有较高的精度.

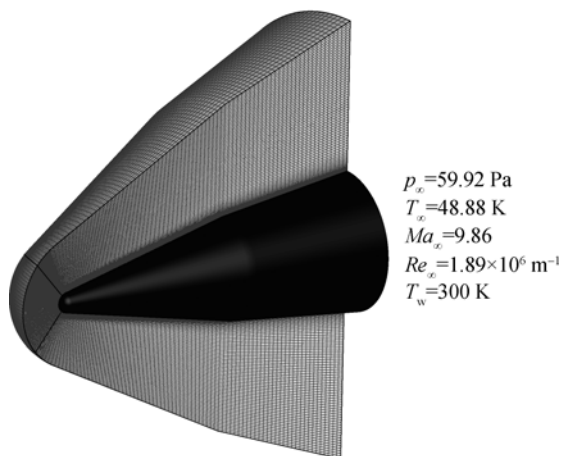


图 8 钝双锥体计算网格及计算条件

Fig. 8 Computational grid and conditions for blunt biconic

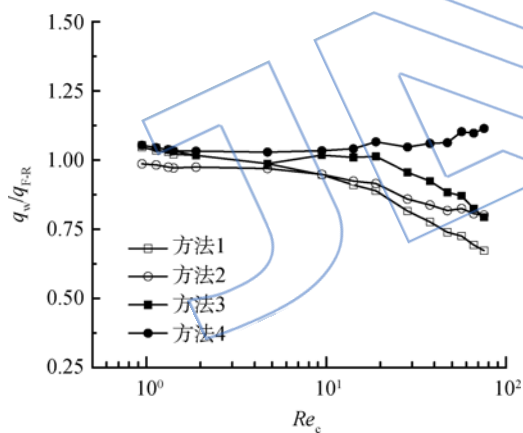


图 9 钝双锥体驻点热流随网格雷诺数的变化

Fig. 9 Stagnation-point heat-flux varying with grid Reynolds number for blunt biconic

表 1 网格无关驻点热流的计算结果与试验结果的对比  
Table 1 Comparison of grid-independent stagnation-point heat-flux between simulation and experimental results

| 方法   | $q_w / q_{F-R}$ |
|------|-----------------|
| 试验   | 1.063           |
| 方法 1 | 1.030           |
| 方法 2 | 0.976           |
| 方法 3 | 1.039           |
| 方法 4 | 1.040           |

## 4 结 论

针对气动热数值模拟中壁面热流后处理方法进行了系统的数值分析研究,并提出了一种有别于常规微分法和积分法的壁面热流后处理方法.通过平板、圆柱钝体及钝双锥体等算例对壁面热流后处理方法的比较分析表明:

1) 即使流场参数相同,采用不同的壁面热流后处理方法计算的壁面热流结果往往也会有较大的差异.

2) 壁面热流后处理方法对热流计算的网格依赖性具有显著影响.微分法具有较强的网格依赖性,单纯提高壁面温度梯度的差分精度,并不一定能够减弱网格依赖性和提高计算精度,还与网格分布密切相关;积分法从能量平衡积分方程出发,极大地减弱了网格依赖性.

3) 本文方法具有与积分法相当的网格依赖性和计算精度,尤其在驻点区域,其网格依赖性更弱于积分法.此外,本文方法计算简单,更易于实现,进一步提高了计算效率.

## 参考文献:

- [1] 李君哲,阎超,柯伦,等.气动热 CFD 计算的格式效应研究[J].北京航空航天大学学报,2003,29(11):1022-1025.  
LI Junzhe, YAN Chao, KE Lun, et al. Research on scheme effect of computational fluid dynamics in aerothermal[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(11): 1022-1025. (in Chinese)
- [2] 阎超,禹建军,李君哲.热流 CFD 计算中格式和网格效应若干问题研究[J].空气动力学学报,2006,24(1):125-130.  
YAN Chao, YU Jianjun, LI Junzhe. Scheme effect and grid dependency in CFD computations of heat transfer[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2006, 24(1): 125-130. (in Chinese)
- [3] 潘沙,冯定华,丁国昊,等.气动热数值模拟中的网格相关性收敛[J].航空学报,2010,31(3):493-499.  
PAN Sha, FENG Dinghua, DING Guohao, et al. Grid dependency and convergence of hypersonic aerothermal simulation[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2010, 31(3): 493-499. (in Chinese)
- [4] Bertin J J, Cummings R M. Critical hypersonic aerothermodynamic phenomena[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2006, 38: 129-157.
- [5] Hoffmann K A, Siddiqui M S, Chiang S T. Difficulties associated with the heat flux computations of high speed flows by the Navier-Stokes equations[R]. AIAA 91-0467, 1991.
- [6] Siddiqui M S, Hoffmann K A, Chiang S T, et al. A comparative study of the Navier-Stokes solvers with emphasis on

- the heat transfer computations of high speed flows[R]. AIAA 92-0835, 1992.
- [7] SUN Quanhuan, ZHU Huiyu, WANG Gang, et al. Effects of mesh resolution on hypersonic heating prediction[J]. Theoretical and Applied Mechanics Letters, 2011, 1(2): 022001. 1-022001. 4.
- [8] 陈思员, 姜贵庆, 张亮. 基于积分法的热流后处理方法[J]. 空气动力学学报, 2010, 28(5): 591-595.
- CHEN Siyuan, JIANG Guiqing, ZHANG Liang. The method of heat flux calculation based on integral method [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2010, 28(5): 591-595. (in Chinese)
- [9] 石清, 李桦. 复杂外形飞行器热流的 NND 有限元数值计算方法[J]. 空气动力学学报, 2009, 27(2): 210-213.
- SHI Qing, LI Hua. The researches on the NND finite element method and its applications in predicting the heat transfer rate around complicated configurations[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2009, 27(2): 210-213. (in Chinese)
- [10] 黄唐, 姜贵庆, 毛国良, 等. 两种物面热流计算方法的比较 [C]//第九届全国计算流体力学会议论文集. 云南 景洪: 中国力学学会, 1998: 280-285.
- [11] Liou M S. A sequel to AUSM: AUSM+ [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 129(2): 364-382.
- [12] Kim K H, Kim C, Rho O H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 174(1): 38-80.
- [13] Yoon S, Jameson A. Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations [J]. AIAA Journal, 1988, 26(9): 1025-1026.
- [14] Yoon S, Jameson A. An LU-SSOR scheme for the Euler and Navier-Stokes equations[R]. AIAA 87-0600, 1987.
- [15] 吴子牛. 空气动力学: 上册[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [16] Dechaumphai P, Thornton E A, Wieting A R. Flow-thermal-structural study of aerodynamically heated leading edges[R]. AIAA 88-2245, 1988.
- [17] Fay J A, Riddell F R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air[J]. Journal of the Aeronautic Sciences, 1958, 25(2): 73-85.
- [18] Miller C G. Experimental and predicted heating distributions for biconics at incidence in air at Mach 10[R]. NASA TP 2334, 1984.